

Métodos de Aproximación de Curvas de Spline

S. Dámaris Amaro Calderón¹
damaris.amaro@gmail.com

Jorge C. Valverde Rebaza¹
jorge.carlos14@gmail.com

Escuela Académico Profesional de Informática
Universidad Nacional de Trujillo

Resumen

En el presente informe se detalla la descripción de las curvas de Spline formadas por secciones polinómicas para satisfacer condiciones específicas de continuidad. Así mismo se presentan dos tipos de curvas de Spline: las curvas de Bézier y las curvas de B-Splines presentando las ecuaciones que las definen.

Palabras Clave: Computer Aided Manufacturing, Computer Aided Design, interpolación, aproximación.

1. Introducción

Los comandos básicos para elaborar gráficos a través de un lenguaje de programación son el punto y el segmento de línea recta. Estas primitivas son suficientes en el sentido de que cualquier otra construcción geométrica puede ser convenientemente aproximada con puntos y segmentos. Muy pronto se comprendió en la Computación Gráfica que las técnicas de representación de objetos están muy limitadas en las posibilidades geométricas de entidades gráficas que se pueden modelar y graficar.

Desde entonces, han aparecido numerosos modelos de representación de objetos, entre las que destaca el **modelo poligonal**, el cual garantiza una apariencia adecuada del objeto graficado en circunstancias normales; pero al representarse dicho modelo en grandes escalas, la naturaleza poligonal se vuelve evidente, pudiendo incluso “desaparecer” de la pantalla; o si, por el contrario, la escala fuese muy pequeña, el objeto ocuparía una parte reducida de la pantalla pero para ser graficado se procesaría la misma cantidad de puntos y aristas.

Pero no es ésta la desventaja más importante de la representación de objetos mediante el modelo poligonal. A comienzos de la década de los sesenta se comenzó a producir piezas industriales en madera, acero o plástico a partir de la ejecución de programas de computadora, en lo que se denomina **Computer Aided Manufacturing (CAM)** o manufactura asistida por computadora. Con el modelo poligonal se logra obtener una estructura de datos adecuada, pero, puede suceder que, si se requieren realizar modificaciones de último momento, entonces será necesaria la trabajosa tarea de editar punto por punto en la base de datos que representa los puntos.

Los sistemas comerciales se hicieron sensibles a estos inconvenientes, por esta razón se comenzaron a incluir las posibilidades de trabajar con círculos, arcos y cónicas, mientras que sistemas más avanzados comenzaron a proveer procedimientos para aproximar y ajustar curvas planas, sin embargo, muy pronto se llegó a la conclusión que esta forma de trabajar seguía siendo incorrecta, trabajosa y sujeta a errores.

La verdadera forma de modelar objetos complejos a partir de descripciones geométricas precisas solo se obtuvo a partir del desarrollo en el **Computer Aided Design (CAD)** de las técnicas de aproximación de curvas y superficies paramétricas a partir de *puntos de control*.

Los métodos de aproximación e interpolación de curvas han sido creados pensando en facilitar la tarea de diseño, la cual es muchas veces una tarea iterativa de prueba y error. Tienen su origen en la década del sesenta cuando Pierre de Casteljaou en Citroën y Pierre Bézier en Renault elaboraron el fundamento teórico de los primeros sistemas de aproximación de curvas que se sobreponían exitosamente a los problemas técnicos y geométricos de los métodos matemáticos de interpolación de funciones basados en los polinomios de Lagrange. Esencialmente ambos trabajos coinciden, aunque fueron independientemente desarrollados, pero como Bézier fue el único que publicó sus resultados, se llevó todo el crédito y la fama.

Muy pronto se produjo una convergencia con los métodos de la teoría de aproximación de funciones, especialmente con las aproximaciones polinomiales a trozos o *splines*¹. Sin embargo, pese al gran desarrollo ocurrido desde entonces, las curvas de Bézier-de Casteljaou continúan siendo la base.

El presente trabajo esta dividido de la siguiente manera, en la sección 2 trataremos acerca de las diferentes representaciones de Spline existentes presentando las especificaciones que deben de cumplir las curvas de Spline, en la sección 3 presentamos dos tipos de Spline: las curvas de Bézier y las curvas de B-Spline. En la sección 4 se presentan las conclusiones y en la sección 5 las referencias

2. Representaciones de Spline

Un spline es una banda flexible que se utiliza para producir una banda suave a través de un conjunto de puntos designados. El término *curva de spline* refiere a cualquier curva compuesta que se forma con secciones polinómicas que satisfacen condiciones específicas de continuidad.

Una curva de spline se especifica a partir de un conjunto de posiciones de coordenadas, que se conocen como *puntos de control*, los cuales indican la forma general de la curva. Dados un conjunto de puntos de control, los *métodos de interpolación* generan una curva que pasa por todos los puntos de control. En cambio, los *métodos de aproximación* generan una curva que normalmente no pasa por todos los puntos de control, excepto, tal vez, por los puntos extremos. Un ejemplo de estas definiciones se observa en la figura 1.

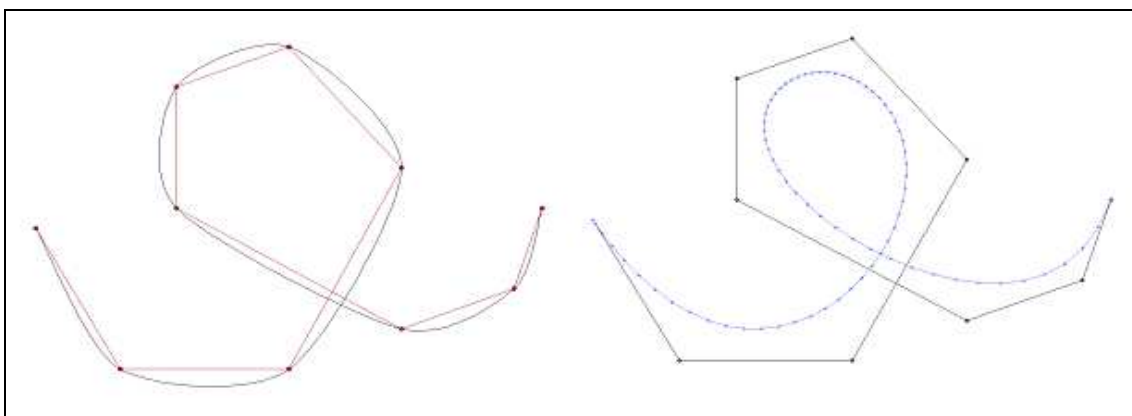


Figura 1. A la izquierda se observa un ejemplo de interpolación y a la derecha un ejemplo de aproximación de curva a partir de puntos de control.

Las curvas de interpolación se utilizan por lo general para digitalizar trazos o especificar trayectorias de animación. Las curvas de aproximación se utilizan sobre todo como herramientas de diseño para estructurar las superficies de los objetos. En el presente trabajo nos ocuparemos acerca de las curvas de aproximación y sus métodos.

¹ Denominamos spline a una curva definida a trozos mediante polinomios.

2.1. Especificaciones de Spline

Existen tres métodos equivalentes para especificar una representación de spline particular:

- Podemos establecer el conjunto de condiciones de frontera que se imponen en la spline.
- Podemos establecer la matriz que caracteriza la spline.
- Podemos establecer el conjunto de funciones de combinación o **funciones base** que determinan la forma en que se combinan las restricciones geométricas de la curva para calcular posiciones a lo largo de la misma.

Sea el caso que se desee una curva por interpolación o aproximación, se debe trabajar con un conjunto de funciones paramétricas, donde el parámetro u varía dentro de un intervalo cerrado (usualmente $u \in [0,1]$). Por ejemplo, para una curva en el espacio podemos encontrar tres funciones $f_x(u)$, $f_y(u)$, $f_z(u)$ que gobiernan la posición de un punto sobre la curva para un valor dado u .

$$C(u) = \begin{cases} x(u) = f_x(u) \\ y(u) = f_y(u) \\ z(u) = f_z(u) \end{cases}$$

En el caso de una curva en el plano se supondrá que $z(u) = 0$. Con el objetivo de fundamentar las tres especificaciones antes mencionadas tomaremos una representación paramétrica cúbica para la coordenada de x a lo largo de una sección de curva de la spline:

$$x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x \quad 0 \leq u \leq 1$$

Por ejemplo se podrían establecer las condiciones de frontera para esta curva, en las coordenadas de extremo $x(0)$ y $x(1)$ y en las primeras derivadas paramétricas en los extremos $x'(0)$ y $x'(1)$. Estas cuatro condiciones de frontera son suficientes para determinar los valores de los cuatro coeficientes a_x , b_x , c_x y d_x . A partir de las condiciones de frontera, obtenemos la matriz que caracteriza a esta curva de spline, de manera tal que se puede expresar de la siguiente manera:

$$x(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

$$x(u) = U \cdot C$$

Esta nueva ecuación representada por un producto matricial donde U es la matriz renglón de potencias del parámetro u y C es la matriz columna de coeficientes. La ecuación anterior se puede expresar también de la siguiente manera:

$$x(u) = U \cdot M_{spline} \cdot M_{geom}$$

Donde M_{geom} es una matriz de columnas de cuatro elementos que contiene los valores de restricción geométrica (condiciones de frontera) en la spline, y M_{spline} es la matriz de 4×4 que transforma los valores de restricción geométrica a los coeficientes polinómicos y ofrece una caracterización para la curva de spline. La matriz M_{spline} es también llamada matriz base y es de particular utilidad para transformar de una representación de spline a otra.

3. Métodos de Aproximación

3.1. Curvas de Bézier

Pierre Bézier, ingeniero francés desarrollo este método de aproximación de splines para utilizarlo en el diseño de las carrocerías de los automóviles Renault. Las splines de Bézier tienen varias propiedades que hacen que sean muy útiles para el diseño de curvas y superficies. Así mismo, son fáciles implementarlas. Por estos motivos, las splines de Bézier están disponibles en forma común en muchos sistemas de CAD, en paquetes generales de gráficas y en paquetes seleccionados de dibujo y pintura.

Una curva de Bézier puede ser ajustada para cualquier número de puntos de control. El número de puntos de control que se debe aproximar y su posición relativa determinan el grado del polinomio de Bézier. Una spline de Bézier también puede ser especificada con condiciones de frontera con una matriz característica, o con funciones de combinación. Para curvas generales de Bézier, la especificación más conveniente es la *función de combinación*.

Dados $n+1$ puntos de control: $p_k(x_k, y_k, z_k)$ con k de rango de 0 a n . Es posible combinar estos puntos de coordenadas para producir el siguiente vector de posición $P(u)$ que describe la trayectoria de una función polinómica de Bézier aproximada entre p_0 y p_n .

$$P(u) = \sum_{k=0}^n p_k BEZ_{k,n}(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

Esta ecuación vectorial representa un conjunto de tres ecuaciones paramétricas para las coordenadas individuales de la curva:

$$x(u) = \sum_{k=0}^n x_k BEZ_{k,n}(u)$$

$$y(u) = \sum_{k=0}^n y_k BEZ_{k,n}(u)$$

$$z(u) = \sum_{k=0}^n z_k BEZ_{k,n}(u)$$

Para el trabajo en el plano xy , el valor de la coordenada z tan solo debe tomar el valor de 0, es decir $z = 0$. Además, las funciones de combinación de Bézier $BEZ_{k,n}(u)$ son los polinomios de Bernstein:

$$BEZ_{k,n}(u) = C(n, k) u^k (1-u)^{n-k}$$

Donde $C(n, k)$ son los coeficientes del binomio:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k} C(n, k-1) \quad n > k \geq 1$$

Como una regla, una curva de Bézier es un polinomio de grado uno menos el número de puntos de control que se utilizan, es decir, tres puntos generan una parábola, cuatro puntos una curva cúbica, etc. También, con ciertas posiciones de los puntos de control se obtienen polinomios de Bézier degenerados, por ejemplo, una curva de Bézier que se genera con tres puntos de control colineales es un segmento de línea recta; y un conjunto de puntos de control que en su totalidad se encuentran en la misma posición de coordenadas produce una "curva" de Bézier que es en realidad un punto.

Las curvas de Bézier se encuentran de manera regular en paquetes de pintura y dibujo, así como en herramientas CAD, puesto que su implementación es fácil y su capacidad es considerable en el diseño de curvas. En la figura 2 se puede observar una curva de Bézier con 11 puntos de control.

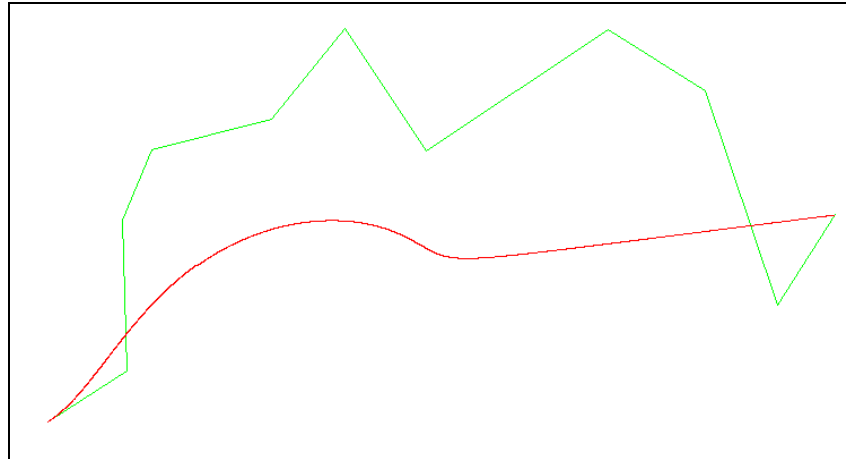


Figura 2. Un ejemplo de curvas de Bézier con 11 puntos de control creado a partir de una aplicación desarrollada por los autores.

3.2. Curvas de B-Splines

Ésta es la clase de splines de aproximación que se usan con mayor frecuencia. Las B-splines tienen dos ventajas sobre las spline de Bézier:

- El grado de un polinomio B-spline se puede establecer de manera independiente de la cantidad de puntos de control (con ciertas limitaciones).
- Las B-spline permiten un control local sobre la forma de una curva o superficie de spline.

La única desventaja que éste tipo de spline tiene es que son más complejas que las spline de Bézier.

Una curva de B-spline puede ser escrita de manera general mediante un planteamiento de función de combinación que permita el cálculo de las posiciones de sus coordenadas, esta expresión es la siguiente:

$$P(u) = \sum_{k=0}^n p_k B_{k,d}(u) \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad 2 \leq d \leq n+1$$

Donde p_k es un conjunto de entrada de $n+1$ puntos de control. A pesar de parecer similares, existen varias diferencias entre ésta formulación de B-splines y aquella para las spline de Bézier. Ahora, el rango del parámetro u depende de la forma en que elegimos los parámetros de la B-spline. Y las funciones de combinación de B-splines, $B_{k,d}$ son polinomios de grado $d-1$, donde el parámetro d se puede elegir como un valor entero en el rango de 2 hasta el número de puntos de control $n-1$. El control local para las B-spline se logra al definir las funciones de combinación en sub-intervalos del rango total de u .

Las funciones de combinación para las curvas B-spline se definen mediante las formulas recursivas de Cox-deBoor (función base para los B-spline):

$$B_{k,1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_k \leq u \leq u_{k+1} \\ 0, & \text{de otro caso} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d-1} - u_k} B_{k,d-1}(u) + \frac{u_{k+d} - u}{u_{k+d} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(u)$$

Donde cada función de combinación se define en sub-intervalos d del rango total de u . El conjunto seleccionado de extremos de sub-intervalos u_j se conoce como *vector de nudo*. Podemos elegir cualesquiera valores para los extremos de sub-intervalo al satisfacer la relación $u_j \leq u_{j+1}$. Así los valores para u_{\min} y u_{\max} dependen de la cantidad de puntos de control que seleccionamos, el valor que elegimos para el parámetro d y la forma en la que establecemos los sub-intervalos (vector de nudo). Ya que es posible elegir los elementos del vector de nudo de manera que los denominadores en los cálculos anteriores pueden tener un valor de 0, lo que supone que ante alguna evaluación como 0/0 se obtendrá el valor de 0.

Las curvas de B-spline se caracterizan por:

- La curva polinomial tiene un grado $d - 1$ y una continuidad C^{d-2} sobre el rango de u .
- Para $n + 1$ puntos de control, la curva se describe con $n + 1$ funciones de combinación.
- Cada función de combinación $B_{k,d}$ se definen sobre los sub-intervalos d del rango total de u , empezando en el valor de nudo u_k .
- El rango del parámetro u se divide en $n + d$ sub-intervalos entre los valores $n + d + 1$ que se especifican en el vector de nudo.
- Con los valores de nudo que se etiquetan como $\{u_0, u_1, \dots, u_{n+d}\}$, la curva B-spline que resulta se define sólo en el intervalo desde el valor de nudo u_{d-1} hasta el valor de nudo u_{n+1} .
- Cada sección de la curva spline (entre dos valores de nudo sucesivos) está influenciada por los puntos de control d .
- Cualquier punto de control puede afectar la forma de la mayor parte de las secciones de curva d .

En la figura 3 se observa una curva de B-Spline Cúbica formada a partir de 11 puntos de control y siguiendo el mismo grafo usado en la figura 2

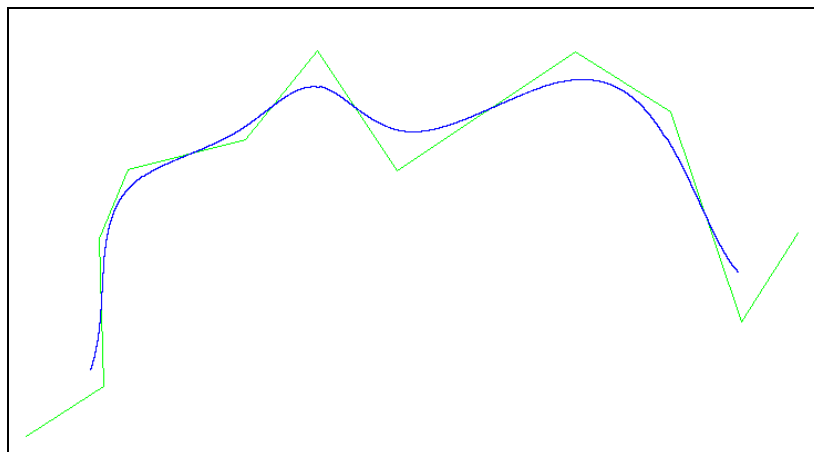


Figura 3. Un ejemplo de curvas de B-Spline con 11 puntos de control creado a partir de una aplicación desarrollada por los autores.

En la figura 4 se observa una comparación entre la curva de Bézier y la curva B-Spline cúbica para un grafo con 15 puntos de control.

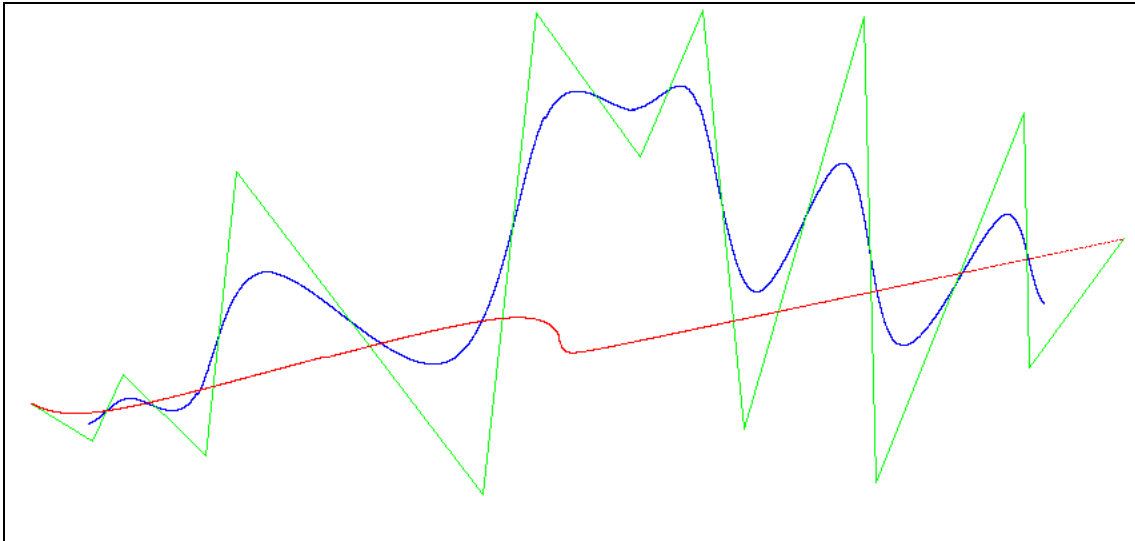


Figura 4. Un ejemplo en el que se puede realizar las comparaciones entre curvas de Bézier (color rojo) y las B-Spline cúbica (color azul) formadas con 15 puntos de control creado a partir de una aplicación desarrollada por los autores.

En la figura 5 se puede apreciar la suavidad con la que la curva de B-Spline Cúbica se acomoda a la forma del grafo para formar una letra G.

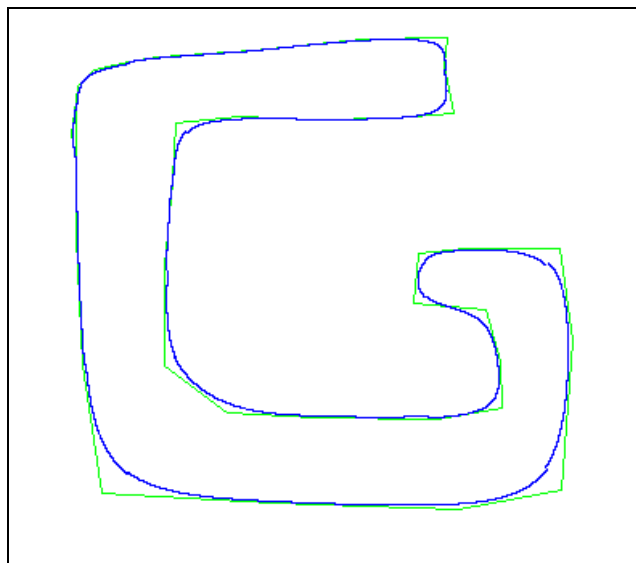


Figura 5. Un ejemplo en el que se puede la suavidad con la que la curva B-Spline se acomoda al grafo formado para generar la letra G. La generación de ésta curva se realizó a partir de una aplicación desarrollada por los autores.

4. Conclusiones

- Los métodos paramétricos de aproximación de curvas logran flexibilidad de representación y eficiencia en el cómputo, pues utilizan una formulación basada en puntos de control.

- Los splines se utilizan en aplicaciones gráficas para el diseño de curvas y superficies, para digitalizar trazos para el almacenamiento en la computadora y especificar trayectorias de animación para los objetos.
- Los splines de Bézier tienen muchas utilidades y se han convertido en la base para el desarrollo de otros métodos. Además son de fácil implementación y gozan de amplia usabilidad, especialmente en sofisticados sistemas CAD.
- Las curvas de B-Spline resultan ser más suaves que las de Bézier y se adaptan mejor a la forma del grafo que las define.

5. Referencias

- [1] D. Hearn, M. P. Baker, *Gráficas por Computadora*, 2º edición. Prentice Hall Hispanoamérica S.A., 1994.
- [2] C. Delrieux, *Introducción a la Computación Gráfica*. Dep de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur, 2000.
- [3] T. Sederberg, *BYU Bézier curves*, Chapter 2, disponible en: http://www.tsplines.com/resources/class_notes/Bezier_curves.pdf
- [4] J.D. Foley et al, *Computer Graphics: Principles and Practice in C*, 2nd ed., Addison Wesley, 1992.